12° Μάθημα: 7/1/2021

Τι νόημα θα είχαν οι ταλαντώσεις στο πλαίσιο της κβαντικής φυσικής?

Δηλαδή έστω ότι έχω ένα ελατήριο με το νόμο του Hooke: $F=-kx \Rightarrow F=-\frac{dV}{dx}=-kx \Rightarrow V=\frac{1}{2}kx^2$

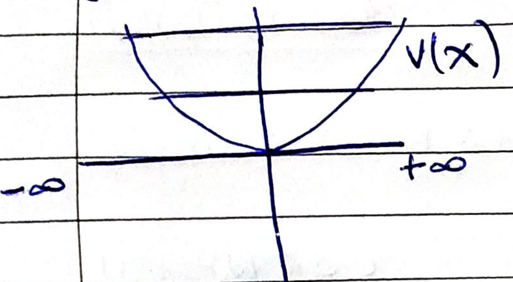
↓ δυναμική ενέργεια

$$\psi''-x^2\psi=-2E\psi$$
$$\psi''-x^2\psi=\lambda\psi$$

Θεωρούμε $\hbar=\omega=k=1$ και γράφουμε την εξίσωση $\psi''+(2E-x^2)\psi=0$

$\psi(\pm\infty)=0$ (συνοριακές συνθήκες)

→ πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο στο $-\infty, +\infty$ είναι 0.



Η συνθήκη $\phi(\pm\infty)=0$ εκφράζει την απαίτηση μας να περιγράψουμε σωματίδια που αδυνατούν να διαφύγουν στο άπειρο (δέσμιες καταστάσεις) και άρα η πιθανότητα να βρεθούν στην περιοχή αυτή μηδενίζεται.

Αν θεωρήσουμε μηδενικές ιδιοτιμές ($E=0$)

θα έχω $\psi''_\infty-x^2\psi_\infty=0$

οι οποίες λύσεις ψ_∞ εκφράζουν τη συμπεριφορά ψ στην περιοχή του απείρου. Η λύση είναι $\psi_\infty(x)=e^{-x^2/2}$

$\psi_\infty(\pm\infty)=0$

y

$$\frac{d\psi}{dx}=\frac{d\psi}{dy}\frac{dy}{dx}$$

Θεωρούμε πλέον λύσεις της αρχικής εξίσωσης ($E\neq0$) της μορφής $\psi(x)=\psi_\infty(x)H(x)=e^{-x^2/2}H(x)$

όπου $H(x)$ ικανοποιεί την: $H''-2xH'+(2E-1)H=0$

αν θεωρήσουμε, επιπλέον, $E=E_n=n+1/2, n\in\mathbb{N}$ τότε

$$H''-2xH'+2nH=0$$ η οποία εξίσωση αντιστοιχεί στα λεγόμενα πολυώνυμα Hermite.

Προβλήματα ιδιοτιμών στην κβαντική φυσική:

Θεώρημα: Αν μια κυματοσυνάρτηση ψ ικανοποιεί την εξίσωση ιδιοτιμών $A\psi = a\psi$, ενός κβαντικού τελεστή A με ιδιοτιμή a, τότε η αβεβαιότητα ΔA του μεγέθους A μηδενίζεται. Το μόνο αποτέλεσμα που προκύπτει από μετρήσεις είναι η ιδιοτιμή a.

→ SOS

Παρατήρηση: Ως αβεβαιότητα ορίζουμε την τυπική απόκλιση $\sigma^2 = (\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$

$\langle A \rangle = \int \psi^* A \psi \, dv = \langle \psi | A | \psi \rangle$ (να ξέρουμε το γιατί)

Αποδ: Γνωρίζουμε ότι $A\psi = a\psi$ άρα

$\langle A \rangle = \langle \psi | A\psi \rangle = \langle \psi | a\psi \rangle = a \langle \psi | \psi \rangle = a$

$(\langle \psi | \psi \rangle) = 1$

$\langle A^2 \rangle = \langle \psi | A^2 \psi \rangle = \langle \psi | A(A\psi) \rangle = a^2 \langle \psi | \psi \rangle = a^2$

Δηλ. $(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 = a^2 - a^2 = 0 \Rightarrow \Delta A = 0$

$$\boxed{A^2\psi = A(A\psi) = A(a\psi) = aA\psi = a(a\psi) = a^2\psi}$$

Η αρχή της αβεβαιότητας:

Το γινόμενο των αβεβαιοτήτων θέσης και ορμής ικανοποιούν τη σχέση: $(\Delta x) \cdot (\Delta p) \geq \frac{\hbar}{2}$

Φυσική σημασία: Η ταυτόχρονη ακριβής γνώση θέσης και ορμής (ταχύτητας) ενός σωματιδίου είναι αδύνατη.

Πολυώνυμα Hermite:

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$y'' - 2xy' + (2n)y = 0$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Ορίζουμε τις λύσεις της εξίσωσης ως τα πολυώνυμα Hermite, με

$$\underbrace{H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}}_{\text{τύπος του Rodrigre}}$$

Παράδειγμα:

$H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$

Ιδιότητες:

1. Γεννήτρια συνάρτησης $e^{2tx - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$

Να βρεθούν τα $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$ από την γεννήτρια συνάρτηση (άσκηση)

2. Αναδρομική τύποι: α. $H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x)$

β. $H_n'(x) = 2x H_{n-1}(x)$.

Αποδ. β:

Γνωρίζουμε ότι $e^{2tx - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$ παραγωγίζουμε

προς x: $2t e^{2tx - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(x)}{n!} t^n \Rightarrow$

$$2t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(x)}{n!} t^n \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2H_n(x)}{n!} t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(x)}{n!} t^n$$

→ Θα ξεκινούσα από $m=1$ αλλά ο $m=0$ δεν αλλάζει τίποτα γιατί είναι 0.

Αλλάζω δείκτη: $n+1=m \Rightarrow n=m-1$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2H_{m-1}(x)}{(m-1)!} t^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(x)}{n!} t^n$$ (το όνομα του δείκτη δεν μετράει)

$H_{-1}(x)=0$

$$\frac{2H_{n-1}(x)}{(n-1)!} = \frac{H_n'(x)}{n!}$$

$$\Rightarrow H_n'(x) = 2\frac{n!}{(n-1)!} H_{n-1}(x) = 2n H_{n-1}(x)$$

Παράδειγμα:

Να δείξετε ότι $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$

Γνωρίζουμε και πάλι ότι $e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$

$$e^{2tx-x^2} = e^{x^2-(t-x)^2} = e^{x^2} \cdot e^{-(t-x)^2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

$$f(t) = e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n = \text{(Θεώρημα Taylor)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

$$H_n(x) = \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{2tx-t^2}\right)\Big|_{t=0} = \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{x^2-(t-x)^2}\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= e^{x^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-(t-x)^2}\Big|_{t=0} = e^{x^2} \frac{d^n}{d(-x)^n} e^{-(t-x)^2}\Big|_{t=0} =$$

↳ είτε παραγωγίζω ως προς t είτε ως προς $-x$ είναι το ίδιο

$$\frac{d}{da} e^{(a+b)} = \frac{d}{db} e^{(a+b)}$$

$$\frac{d}{da} e^{(a-b)} = -\frac{d}{d(b)} e^{(a-b)} = \frac{d}{d(-b)} e^{(a-b)}$$

$$= e^{x^2} (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$